МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Омский государственный технический университет»

Факультет информационных технологий и компьютерных систем

Кафедра «Прикладная математика и фундаментальная информатика»

**Расчётно-графическая работа**

|  |  |
| --- | --- |
| по дисциплине | Алгебра |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
| Студента | Курпенова Куата Ибраимовича |
|  | фамилия, имя, отчество полностью |
| Курс | 1 Группа ФИТ-212 |
| Направление | 02.03.02 Фундаментальная информатика |
|  | и информационные технологии |
|  | код, наименование |
| Руководитель | доц., канд. пед. наук, доцент |
|  | должность, ученая степень, звание |
|  | Белим С.Ю. |
|  | фамилия, инициалы |
| Выполнил | 25.05.2022 |
|  | дата, подпись студента |
| баллы |  |
|  | дата, подпись руководителя |

Омск-2022

**Вариант 14**

**Задача №1**

Найти длины (нормы) векторов и и угол между векторами в евклидовом пространстве .

**Решение:**

1. Длина векторов:

2) Угол между векторами:

**Ответ:**

**Задача 2.**

Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора   
 на подпространство .

**Решение:**

1) Рассмотрим подпространство : поскольку в его линейной оболочке содержится два одинаковых вектора ( и ), то будем считать, что подпространство двумерно.

2) По определению, , где – ортогональная проекция вектора на подпространство (), а – ортогональная составляющая на подпространство (), так как , где – ортогональное дополнение к .

3) Найдем ортогональное дополнение к подпространству . По определению, . Пусть , значит, так как базисом подпространства являются векторы и , то . Следовательно, скалярное произведение данных пар векторов равно нулю. Имеем:

. ФСР данной системы – базис   
().

4) Решим ОСЛУ. Составим матрицу коэффициентов и приведем ее к модифицированному виду:

. Имеем:

,   
, .

Значит, .

5) Рассмотрим пространство и его базис: построим ортогональный базис пространства с помощью процесса ортогонализации Грама-Шмидта. Имеем:

Значит, .

6) Рассмотрим пространство и его базис: построим ортогональный базис пространства с помощью процесса ортогонализации Грама-Шмидта. Имеем:

.

Значит, .

7) Поскольку , следовательно, базис пространства имеет вид:

, причем данная система векторов является ортогональной ().

8) Рассмотрим вектор . Найдем координаты вектора в базисе .

Поскольку , то . Будем искать

с помощью свойств ортогонального базиса.

Рассмотрим линейную комбинацию :

8.1) ;

;

; // ();

. Имеем:

8.2) По аналогии с п. 8.1:

9) Имеем: в базисе вектор .

Поскольку , где , а , , , а , то

**Ответ:**, .

**Задача 3.**

Является ли линейным оператором отображение:

по правилу:

**Решение:**

1. Условия:

2) Первое условие:

первое условие выполняется.

3) Второе условие:

второе условие выполняется.

**Ответ:** отображение является линейным оператором.

**Задание 4.**

В линейном пространстве действует оператор дифференцирования . Найти матрицу оператора в базисе   
, базис ядра оператора, базис образа оператора.

**Решение:**

1) Рассмотрим базис и оператор : матрица оператора в базисе строится по следующему правилу: – это матрица-конкатенация координат образов базисных векторов в базисе .

2) .

3)

.

Рассмотрим равенство :

;

;

.

4) .

Рассмотрим равенство :

;

.

5) Имеем: .

6) По определению, – ядро оператора .

Рассмотрим равенство : необходимо решить ОСЛУ , т. к. . Приведём матрицу к модифицированному виду:

Восстановим систему по данной матрице:

нулевое пространство, содержащее лишь нулевой вектор.

7) По определению, , причем  
, то есть – линейная оболочка образов базисных векторов. Поскольку в матрице оператора хранится информация о координатах образов базисных векторов в базисе , то   
, причем эти векторы линейно независимые, поскольку   
 (см. решение ОСЛУ в пункте 6).

**Ответ:** , ,

.

**Задание 5.**

Найти спектр и базисы собственных подпространств преобразования, заданного в естественном базисе матрицей . Если возможно, найти подобную ей диагонального вида, указать диагонализирующий базис.

**Решение:**

1) По определению, – это множество всех собственных значений оператора , причем – корень характеристического многочлена матрицы оператора . Пусть – характеристическая матрица, тогда характеристический многочлен , где

.

Пусть , тогда . Имеем:

; ;

; ;

. Следовательно,

– спектр преобразования .

2) По определению, .

Значит, чтобы найти собственное подпространство , необходимо решить ОСЛУ при конкретных значениях ().

2.1) Пусть . Решим ОСЛУ .

. Восстановим систему:

, , .

Значит, , .

2.2) Пусть . Решим ОСЛУ .

. Восстановим систему:

,. Значит,

,.

3) По критерию, преобразование диагонализируемо , где – геометрическая кратность (). Имеем:  
, значит, преобразование диагонализируемо. Тогда диагонализирующий базис , а диагональная матрица преобразования в базисе .

**Ответ:** , , , диагонализирующий базис , диагональная матрица преобразования в базисе .

**Задание 6.**

Найти нормальный вид следующих квадратичных форм и приводящее к нему линейное невырожденное преобразование, если

.

**Решение:**

1) Для нахождения нормального вида квадратичной формы и приводящего к нему линейного невырожденного преобразования воспользуемся методом Лагранжа.

1.1) Поскольку нет ведущей переменной, положим, что

; имеем:

.

То есть .

1.2) Выберем ведущую переменную :

. Введем новые переменные:

. Имеем: – нормальный вид квадратичной формы. Причем

.

Найдем обратную матрицу:

.

2) Найдем невырожденное преобразование:

.

**Ответ:** – нормальный вид квадратичной формы , приводящее к нему линейное невырожденное преобразование .

**Задание 7.**

Не находя канонического вида, выяснить, является ли квадратичная форма положительно или отрицательно определенной, неположительной, неотрицательной или неопределенной.

**Решение:**

1) Найдем матрицу квадратичной формы : .

2) Для исследования знакоопределенности квадратичной формы , воспользуемся критерием Сильвестра:

2.1) Найдем все угловые миноры матрицы квадратичной формы .

2.2) Из критерия Сильвестра вытекает, что квадратичная форма не является ни положительно определенной, ни отрицательно определенной, значит, она является либо неположительной, либо неотрицательной, либо знакопеременной.

3) Воспользуемся расширенным критерием Сильвестра для исследования квадратичной формы:

3.1) Поскольку главный минор 3 порядка , то квадратичная форма не является неотрицательной.

3.2) Поскольку главный минор 1 порядка , то уже не все миноры 1 порядка являются неположительными, значит, квадратичная форма не является неположительной.

4) Получается, что квадратичная форма является знакопеременной.

**Ответ:** квадратичная форма является знакопеременной.

**Задание 8.**

Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду, и написать этот канонический вид.

**Решение:**

1) Найдем матрицу квадратичной формы : .

2) Пусть – характеристическая матрица матрицы , тогда характеристический многочлен , где

.

Пусть , значит, . Получается, .

Имеем: – канонический вид.

3) Для того, чтобы найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду, найдем собственные подпространства, отвечающие собственным значениям.

3.1) Рассмотрим и ОСЛУ . . Решим ОСЛУ:

.

, , .

. Ортогонализируем данную систему векторов:

;

. Нормируем векторы:

, . Имеем:

– ортонормированная система векторов.

3.2) Рассмотрим и ОСЛУ . . Решим ОСЛУ:

.

,.

. Нормируем данный вектор: . Имеем:

– ортонормированная система векторов.

4) Получаем, система – диагонализирующий базис, а матрица ортогонального преобразования   
. Имеем: – ортогональное преобразование, где – ортогональная матрица.

**Ответ:** – канонический вид,

– ортогональное преобразование.